

Diseño y Simulación del Control para un Mecanismo Planar  
Implementado en Terapias de Tobillo para Niños de 3 a 7 años que  
presenten Parálisis Cerebral.

Claudia Lorena Castañeda Jiménez

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA  
BOGOTÁ  
2017

Diseño y Simulación del Control para un Mecanismo Planar  
Implementado en Terapias de Tobillo para Niños de 3 a 7 años que  
presenten Parálisis Cerebral.

Claudia Lorena Castañeda Jiménez

Trabajo de grado para obtener el título de Ingeniero en Mecatrónica

Directores

Ing. Oscar Fernando Avilés Sánchez, Ph.D  
Ing. Mauricio Felipe Mauledoux Monroy, Ph.D

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECATRÓNICA  
BOGOTÁ  
2017

Nota de Aceptación

-----  
-----  
-----  
-----  
-----  
-----

-----

Firma de Jurado

-----

Firma de Jurado

-----

Firma de Jurado

-----

Firma de Jurado

## *Dedicatoria*

*Quiero dedicar este proyecto a mis padres*

*German Castañeda y Amparo Jiménez.*

*Por se el pilar fundamental en todo lo que soy, por haberme apoyado en todo momento,  
por darme ánimos para afrontar cada uno de los retos presente en este largo y difícil  
camino, por brindarme la oportunidad de cumplir este gran sueño.*

*A mis hermanos, German E Castañeda y Carolina Castañeda*

*por a ser unas personas tan maravillosas, por ser un modelo a seguir y por estar  
siempre conmigo a pesar de la distancia. Siempre estarán en mi corazón*

*A mis amigos, por apoyarnos mutuamente en nuestra formación profesional y por  
todos los momentos inolvidables buenos y malos vividos durante la carrera*

*¡Gracias a ustedes!*

## *Agradecimientos*

*Le quiero dar las gracias principalmente a mis directores Maurico Mauledoux y Oscar Avilés, por brindarme su orientación en el desarrollo de este trabajo, también les quiero agradecer por su tiempo y paciencia que tuvieron a lo largo del proceso.*

*De igual forma a todos los docentes del departamento de Ingeniería en Mecatrónica por brindar todos sus conocimientos dados en el transcurso de la carrera, gracias a ellos logré tener un crecimiento profesional.*

*Finalmente, a toda mi familia por el apoyo incondicional.*

# Contenido

<b>Contenido</b>	<b>6</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>9</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>12</b>
1.1. Justificación . . . . .	12
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	13
1.3. Estado del arte . . . . .	13
1.3.1. Mecanismos implementados para rehabilitación de miembros inferiores . . . . .	13
1.3.2. Controles implementados en rehabilitación . . . . .	18
1.3.3. Desarrollo de la etapa tobillo-pie de un sistema de rehabilitación de marcha para niños con parálisis cerebral. . . . .	20
1.4. Objetivos . . . . .	21
1.4.1. General . . . . .	21
1.4.2. Específicos . . . . .	21
1.5. Organización del documento . . . . .	21
<b>2 Marco Teórico</b>	<b>22</b>
2.1. Parálisis cerebral . . . . .	22
2.1.1. Clasificación . . . . .	22
2.1.2. Tratamiento . . . . .	24
2.2. Marcha humana . . . . .	24
2.2.1. Ciclo de marcha humana . . . . .	25
2.2.2. Variables de ciclo de marcha . . . . .	27
2.2.3. Adquisición de datos . . . . .	27
<b>3 Análisis cinemático y dinámico.</b>	<b>28</b>
3.1. Ecuaciones Cinemáticas . . . . .	28
3.2. Ecuaciones Dinámicas . . . . .	30
<b>4 Diseño Controladores</b>	<b>32</b>
4.1. Adquisición de trayectoria para rehabilitación de tobillo. . . . .	32

4.2. Controles implementados . . . . .	35
4.2.1. Servo sistema . . . . .	36
4.2.2. Servo sistema dinámico . . . . .	38
4.2.3. Modos deslizantes . . . . .	39
4.3. Simulaciones . . . . .	41
4.3.1. Servo sistema . . . . .	41
4.3.2. Servo Sistema Dinámico . . . . .	41
4.3.3. Modos deslizantes . . . . .	42
4.3.3.1. Modos deslizantes-modelo matemático . . . . .	42
4.3.3.2. Modos deslizantes-modelo en SimMechanics . . . . .	43
<b>5 Resultados</b>	<b>45</b>
<b>6 Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>
<b>A Análisis Dinámico</b>	<b>52</b>
<b>B Diagrama de control del servo sistema</b>	<b>54</b>
<b>C Diagrama de control del servo sistema dinámico</b>	<b>55</b>
<b>D Diagrama de control modos deslizantes</b>	<b>56</b>
<b>E Diagrama de control modos deslizantes SimMechanics</b>	<b>57</b>

# Lista de figuras

1.1. Robot lineal de tobillo . . . . .	14
1.2. Actuador de tobillo . . . . .	14
1.3. Sistema en paralelo . . . . .	15
1.4. Calcetín suave . . . . .	15
1.5. Plataforma de dos grados de libertad . . . . .	16
1.6. Robot en paralelo para rehabilitacion de tobillo . . . . .	16
1.7. plataforma del tobillo . . . . .	17
1.8. Estructura del dispositivo de rehabilitación . . . . .	17
1.9. Modelo CAD del robot . . . . .	18
1.10. Relacion del sistema en coordenadas . . . . .	19
1.11. Ciclo de caminata . . . . .	20
2.1. Anatomia[1] . . . . .	25
2.2. Caminata humana . . . . .	25
2.3. Secuencia de los pies entre las fases . . . . .	26
3.1. Mecanismo de cuatro barras . . . . .	29
4.1. software de simulacion OpenSim . . . . .	33
4.2. Ángulos de rotación en cadera y rodilla. . . . .	33
4.3. Diagrama del péndulo doble . . . . .	34
4.4. Trayectoria Generada . . . . .	35
4.5. Control lazo abierto . . . . .	35
4.6. Control en lazo cerrado . . . . .	36
4.7. Realimentación de estados . . . . .	36
4.8. Realimentación con observador . . . . .	36
4.9. Servo sistema lineal . . . . .	41
4.10. Servo sistema dinámico . . . . .	42
4.11. Modos deslizantes-modelo matemático . . . . .	42
4.12. Modelo en SimMechanics . . . . .	43
4.13. SimMechanics . . . . .	44
5.1. Respuesta de los sistemas de control . . . . .	46



# Lista de tablas

2.1. Sistema de Clasificación de Funciones Motoras Globales (GMFCS)[2]	23
2.2. Fase de apoyo	26
4.1. Medidas antropométricas	34

# Resumen

Este trabajo de grado está enmarcado en el control de un mecanismo de cuatro barras, utilizado para rehabilitación de tobillo de niños que presentan parálisis cerebral; se emula el movimiento realizado del pie en el ciclo de marcha.

Para ello se realizó el modelo cinemático y dinámico del mecanismo que permite imitar dicho movimiento, a partir de esto se determinó y diseñó estrategias de control, demostrando el seguimiento de la trayectoria deseada. Esta, se obtuvo mediante el análisis de la cinemática del miembro inferior utilizando un modelo de péndulo doble, donde dicha trayectoria depende de los ángulos realizados por la cadera y la rodilla, los cuales se determinaron gracias a un software de simulación de la marcha humana.

Para tal efecto, se diseñó el control que siguiera dicha trayectoria por servo sistema y modos deslizantes, obteniendo como resultado que el control por modos deslizantes cumplía con el seguimiento de la trayectoria deseada.

# Abstract

This work of degree is framed in the control of a mechanism of four bars used for the rehabilitation of ankle of children with cerebral palsy, which emulates the movement of the foot in the walking cycle.

To do this, the kinematic and dynamic model of the mechanism is performed, the quality allows an analysis, a verification of the achievement to determine and design the most appropriate control strategy which allows it to track the desired tray

The desired trajectory was determined by means of the analysis of the lower limb, for this a double pendulum model is used in which said trajectory depends on the angles made by the hip and the knee. These angles were determined by a software of human gait simulation.

The control that followed the tray was then performed, for this purpose it was designed and controlled by the servo system and the sliding modifiers, where it was obtained as a result that the control by the compression sliders with the tracking of the desired tray

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Justificación

En la actualidad, una de las enfermedades que se presentan en niños es la parálisis cerebral, teniendo así una vida tortuosa y complicada ya sea para la familia y para ellos, ya que ellos tienen que tener a una persona que le ayude a realizar cada una de las actividades cotidianas. En esta enfermedad presenta una deficiencia motora por consecuente, tareas fáciles como caminar se convierte una dificultad muy grande, para reducir este impedimento los médicos recetan con frecuencia terapias físicas en donde se realiza ciertos movimientos repetitivos que mejoran la actividad de cada uno de los músculos y articulaciones, el tratamiento suele llevar varias, sesiones en el cual se convierte un poco tedioso para los terapeutas, por lo tanto se desea realizar un dispositivo que cumpla con los requerimientos necesarios para la terapia.

El tratamiento por medio de terapias físicas y el uso de equipamiento adaptativo reduce la pérdida de elasticidad en los miembros, la prevención del endurecimiento de los tendones, problemas de escoliosis y problemas óseos [3]

Este trabajo se enfoca en los métodos de control de trayectoria que se pueden realizar para un robot utilizado para terapias físicas del miembro inferiores (tobillo), con ello se pretende observar las variaciones en cada una de las trayectorias mostradas por el tratamiento, ya que esto deben ser variables de acuerdo con las necesidades del paciente, por lo tanto, el control a implementar debe ajustarse a la exigencia del procedimiento.

El estudio para realizar el mecanismo de rehabilitación incluye la edad del paciente, el tipo de parálisis y la trayectoria que se desea implementar. Se tiene en cuenta la complejidad que se tiene presente en cada una de las terapias de aquellas que presentan este tipo de enfermedad.

Las investigaciones se han desarrollado en todas partes del mundo con el fin de ayudar a todas las personas implicadas en la enfermedad. Estas investigaciones se enfocan principalmente en el movimiento implicado para la caminata en lugares como la cadera, rodillas y tobillo.

Con el desarrollo de esta tesis, busca la implementación de varios controles para el seguimiento de una trayectoria específica y de esta forma garantizar la buena ejecución de las terapias

## 1.2. Planteamiento del problema

En Colombia la parálisis cerebral es una de las enfermedades más frecuentes en los niños que presentan alguna discapacidad. Cada 2 de 1000 niños presenta dicha enfermedad; perjudicando su vida ya que tiene importantes limitaciones motoras, teniendo en cuenta que estos niños también presentan dificultad sensorial e intelectual para ellos es necesario mejorar la movilidad de los pacientes, su vida cotidiana y aumentar un poco su independencia[4]. Los métodos utilizados deben lograr un estímulo positivo de forma agradable, variada y satisfactoria para el paciente al igual que los niños, necesitan experiencias nuevas para lograr un buen aprendizaje [5]

Los dispositivos implementados para rehabilitación de tobillo presentan una estructura amplia, en algunos casos un poco incómodos; y no se tiene en cuenta se tiene en cuenta los movimientos necesarios para un buen tratamiento. Por lo tanto se desea realizar un sistema en donde se cumplan todas las necesidades para la realización de terapias hacia pacientes de 3 a 7 años con parálisis cerebral

## 1.3. Estado del arte

### 1.3.1. Mecanismos implementados para rehabilitación de miembros inferiores

En relación con el enfoque del tema a desarrollar en el trabajo de grado, se han realizado múltiples investigaciones, que aportan información de utilidad respecto los dispositivos implementados para la rehabilitación de tobillo con niños que presentan parálisis cerebral, puesto que dependiendo del lugar, la edad o el tipo de tratamiento, el diseño cambian, ya que se deben acomodar a la necesidad del usuario, puesto que no es lo mismo la rehabilitación de miembros superiores a los inferiores.

Para la realización el trabajo de grado se tiene presente los beneficios que conllevan el uso de la tecnología en la rehabilitación de miembros inferiores en niños, teniendo en cuenta los cambios que hay en las trayectorias cuando se realiza una caminata lenta o el movimiento que se produce cuando se está corriendo, para obtener un dispositivo en el cual se logre simular dichos movimientos y realizar un trabajo correcto en la rehabilitación.

Para ello se ha realizado diversas investigaciones, uno de ellos fue el diseño de un exoesqueleto de la rodillas hasta el tobillo, «Wake-up» utilizado para rehabilitación de miembros inferiores a niños de 5 a 13 años con enfermedades neurológicas, teniendo la facilidad de seleccionar las articulaciones en la cual se desea realizar la terapia, dicho dispositivo consta de actuadores rotativos elásticos [6]

Otra de las investigaciones relacionadas con este tema, son las estimaciones de variables dinámicas que se presentan al tomar medicamentos relacionados a la parálisis cerebral, para ello se utilizó un robot llamado «PadiAnklebot» el cual se puede ver en la figura 1.1. Este realizaba un movimiento en los dos grados de libertad de tobillo obteniendo así la información de los músculos a dicha estimulación, teniendo en cuenta que las mediciones que se tomaron antes de

la aplicación de los medicamentos y un mes después y así comprobar los cambios que se deben tener en cuenta para la rehabilitación del tobillo [7]



Figura 1.1: Robot lineal de tobillo

Otro dispositivo que se ha diseñado es el que se puede ver en la figura 1.2 Este es utilizado principalmente en rehabilitación de pacientes con trastornos neuromusculares, dando como ventaja la supresión de teraputas constantes en todo el proceso; Este dispositivo presenta un control de asistencia o resistencia al realizar los movimientos y se obtiene información completa respecto a los avances obtenidos en el tratamiento [8]



Figura 1.2: Actuador de tobillo

También se puede ver que los dispositivos desarrollados para la rehabilitación de miembro inferior puede ser paralelos, como por ejemplo el ACTIVE-ANKLE (figura 1.3 ) diseñado como un sistema en el cual produce movimientos esféricos, permitiendo así un control sobre todos los grados de libertad del tobillo, este mecanismo al ser diseñado en paralelo presenta una mayor resistencia a la fuerza del pie y mayor velocidad, reaccionando mejor al control impuesto, dándole así una gran ventaja sobre los demás [9]

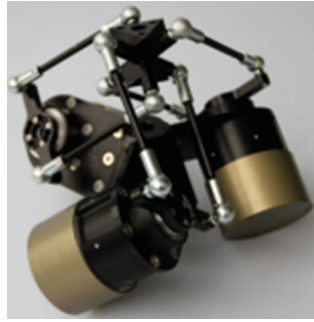


Figura 1.3: Sistema en paralelo

Otro dispositivo que se ha desarrollado para la rehabilitación de tobillo es el calcetín suave, este es utilizado principalmente con personas con problemas cardiovasculares ya que su funcionamiento impide que se formen coágulos de sangre en las piernas. También es utilizado como dispositivo para realizar las terapias físicas del miembro inferior ya que produce un movimiento de flexión en el, utilizando para ellos actuadores hidráulicos blandos como se puede ver en la figura 1.4[10]



Figura 1.4: Calcetín suave

También se pueden encontrar dispositivos utilizando plataformas en las cuales se limita los grados de libertad, en este caso se presenta una superficie plana que produce vibraciones para estimular los músculos del tobillo y de esta forma se realiza la terapia (figura 1.5), para verificar la fuerza aplicada y los beneficios de la plataforma se hace por medio de cámaras mientras se está realizando el procedimiento, con esto también se logra tener un sistema realimentado en el cual se realiza un control para no exceder la fuerza y no lastimar al paciente [11].

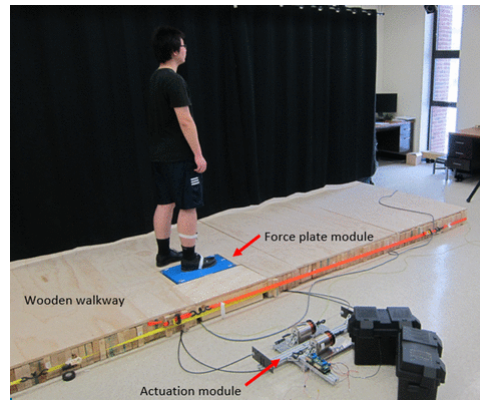


Figura 1.5: Plataforma de dos grados de libertad

Otro de los diseños utilizados en la rehabilitación de tobillos, son robots en paralelo mejorando la rigidez y la precisión. También se debe tener en cuenta que dichos dispositivos pueden aplicar una mayor fuerza al realizar la respectiva terapia, el dispositivo mostrado en la figura 1.6 se implementó para pacientes con traumas musculares [12].

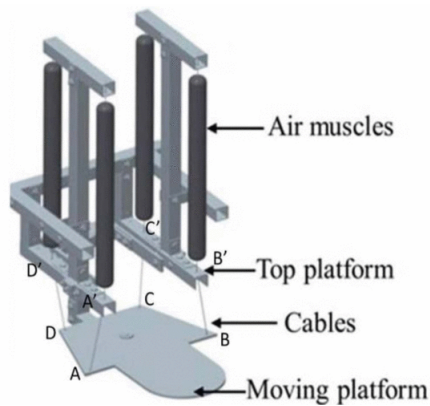


Figura 1.6: Robot en paralelo para rehabilitacion de tobillo

Otro mecanismo que se encuentra en la rehabilitación de tobillo son los sistemas robóticos, en donde se puedan generar los movimientos continuos en la articulación. Este dispositivo posee un grado de libertad, en donde se implementa un motor sujeto a una placa el cual se fija al pie como se puede ver en la figura 1.7, también se presenta una estructura para el soporte de la pierna, logrando así obtener la mejor ubicación de ella para un tratamiento adecuado como se ve en la figura 1.8 [13]





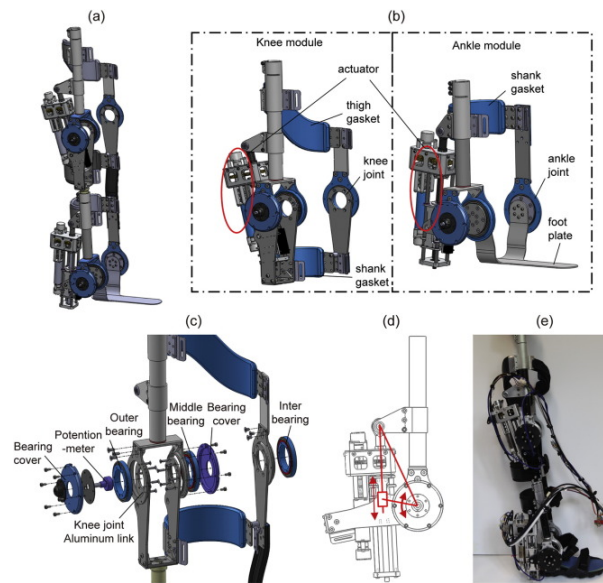


Figura 1.9: Modelo CAD del robot

Anteriormente se mostraron los diferentes mecanismos implementados para la rehabilitación de los miembros inferiores, en estos casos se pudieron ver como se utilizaron de varios tipos de actuadores y estructuras. La mayoría de los que se presentaron no se tienen en cuenta el tamaño del paciente ni el tipo de terapias que se implementa al paciente.

### 1.3.2. Controles implementados en rehabilitación

En la rehabilitación de pacientes con alguna dificultad motora se ha implementado diversos mecanismos y sistema para dichas actividades. Es necesario tener métodos de control ya que gracias a estas, se pude tener un buen funcionamiento de los dispositivos y tener una terapia eficientes.

En todos los años de investigación se ha podido obtener diversos tipos de control, los cuales algunos de ellos se pueden ver a continuación

Uno de los métodos implementados en la robótica de rehabilitación son los controles deslizantes. En este trabajo “Robust sliding mode adaptive control for lower extremity exoskeleton” [15], el sistema de control se diseñó para el seguimiento de trayectorias, se utilizó de dos formas, una como cooperativa en donde el robot detecta los movimientos del paciente con el cual por medio de realimentación adapta la asistencia del mecanismo, la otra forma es la no cooperativa en la cual el sistema sigue una trayectoria fija.

Para el buen funcionamiento del control se debe obtener un modelo dinámico ya que juega un papel muy importante en la simulación del movimiento y el análisis estructural, en este caso se implementó el método de Newton-Euler, de esta forma se calcularon las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerza del sistema [15].

Otro de los métodos implementados en la robótica de rehabilitación son los controles con impedancias ya que estos se utilizan principalmente en los exoesqueletos. El control de impedan-

cia se puede aplicar a diferentes variables como la velocidad y la fuerza al mismo tiempo. En el trabajo presentado por “ An improvement on impedance control performance of an exoskeleton suit in the presence of uncertainty ” se basan en la dinámica inversa del dispositivo teniendo como resultado un mejor rendimiento del dispositivo y una mejora frente a las perturbaciones y oscilaciones [16]

Una de las técnicas más utilizadas es el control por impedancias como se puede ver en el trabajo realizado en “Impedance Control of an Intrinsically Compliant Parallel Ankle Rehabilitation Robot”[17]. Este es utilizado principalmente para el seguimiento de trayectorias en donde el paciente presenta una resistencia suave. En este caso no se tiene presente el movimiento rotativo del tobillo.

Para obtener una buena trayectoria se debe analizar con detalles la cinemática de las articulaciones, para ello es utilizado métodos como cinemática directa e inversa, la directa es utilizada para encontrar la posición velocidad y aceleración de cada una de las articulaciones (links del sistema).[18]

En la investigación “Kinematics analysis and three-dimensional simulation of the rehabilitation lower extremity exoskeleton robot”,se puede ver como se implantaron los métodos de cinemática, utilizando un marco de referencia encontrado en la mitad de las dos piernas y ubicando cada uno de los ejes de cada articulación presente en los miembros inferiores como se puede ver en la figura 1.10 [18]

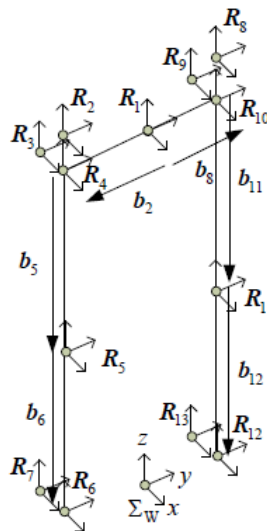


Figura 1.10: Relacion del sistema en coordenadas

Obteniendo como resultado los movimientos de cada una de las articulaciones (figura1.11 )

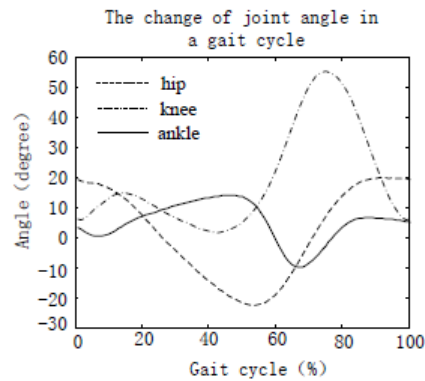


Figura 1.11: Ciclo de caminata

### 1.3.3. Desarrollo de la etapa tobillo-pie de un sistema de rehabilitación de marcha para niños con parálisis cerebral.

En este proyecto se encuentra un mecanismo en paralelo para rehabilitación de la etapa tobillo-pie para niños de 2 a 7 años. Logrando que el paciente pueda realizar el seguimiento de la trayectoria del pie; teniendo en cuenta que el mecanismo hace parte de una estructura en donde el paciente tiene comodidad y tenga el equilibrio una buena sustentación en las terapias [19]

El control que se implementa es un control de velocidad por medio de un PID.

Este proyecto tiene como objetivo completar el trabajo mostrado anteriormente, realizando controles de posición para un seguimiento de trayectorias deseadas, de esta forma garantizar una terapia efectiva

Los controles más utilizados en los mecanismos de rehabilitación son los no lineales, como control de impedancia, controles predictivos, entre otros. La implementación de estos controles son de modo lineal por lo tanto en este trabajo se utilizó los modelos dinámicas. Estos controles no tienen en cuenta el tipo de terapia, ni el movimiento de éstas para la recuperación de la discapacidad del paciente. Una de las mejoras que se pueden establecer en dichos controles es la disminución de las perturbaciones y la implementación de controles de fuerza en las articulaciones.

Respecto al proyecto realizado «Desarrollo de la etapa tobillo-pie de un sistema de rehabilitación de marcha para niños con parálisis cerebral». Este presenta un control de forma lineal y no verifica el error de estado estable cero, presentando unas pequeñas oscilaciones, por lo tanto se planifica un control más robusto y no lineal

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. General

Diseñar el control para un mecanismo planar, mediante el cual se pueda reproducir el movimiento de la articulación del tobillo en la marcha humana para niños con parálisis cerebral entre los 3 a 7 años

### 1.4.2. Específicos

- Analizar el movimiento de la articulación del tobillo con el fin de obtener las posibles trayectorias generadas por este.
- Diseñar y simular una técnica de control la cual sea capaz de seguir la trayectoria minimizando perturbaciones externas.
- Diseñar y simular en un ambiente virtual el mecanismo planar de manera que se pueda validar el sistema de control sobre la trayectoria deseada, la cual ha sido obtenida en el análisis de la marcha seleccionada anteriormente.

## 1.5. Organización del documento

La estructura de este documento es el siguiente: El capítulo 2 se presenta todos los mecanismos de rehabilitación de miembros inferiores, también se presenta la justificación y el planteamiento del problema y los objetivos del proyecto. En el capítulo 3, abarca toda la información teórica respecto a la parálisis cerebral, marcha humana. El capítulo 4 se muestra el análisis cinemático y dinámico del mecanismo implementado y por último se presenta el diseño de controles simulaciones y conclusiones

## Capítulo 2

# Marco Teórico

### 2.1. Parálisis cerebral

La parálisis cerebral es una enfermedad, que presenta deterioro en la movilidad, ya que los niños que poseen dicha enfermedad presentan un aumento del tono muscular y espasmos, produciendo fuerzas desequilibradas en los músculos de los miembros inferior o superior; muchos de los pacientes puede llevar acabo enfermedades físicas como la dislocación de cadera o deformaciones en pies y tobillos, en generar el tratamiento más utilizado para esta tipo de enfermedad se presenta por medio de cirugías, ya sea para la reconstrucción de tejidos blandos o reconstrucción del musculo afectado [20].

El trastorno se puede presenta antes, durante o después del nacimiento hasta una edad de los 3 años. Los factores que se pueden tener para la obtención de dicha enfermedad son lesiones en la cabeza producidas por un golpe, alguna enfermedades como meningitis presentes en las primeras semanas de nacido o problemas cerebrovasculares [21]

#### 2.1.1. Clasificación

La parálisis cerebral se puede clasificar de dos formas según el estado funcional del paciente o base del tipo y distribución de los hallazgos motores predominantes.

Para la clasificación del estado funcional se determina por el *Sistema de Clasificación de Funciones Motoras Globales (GMFCS)*. como se puede observar en la tabla 2.1[2]

Tabla 2.1: Sistema de Clasificación de Funciones Motoras Globales (GMFCS)[2]

Nivel	Condición del paciente
Nivel 1	Paciente ambulatorio que caminan sin restricciones, se puede tener problemas con habilidades motoras avanzadas, equilibrio y coordinación
Nivel 2	Pacientes ambulatorios que pueden tener dificultad para caminar al aire libre y probablemente experimentan limitaciones con tareas motoras gruesas avanzadas. Puede utilizar dispositivos para la estabilidad y apoyo.
Nivel 3	Pacientes que usan dispositivos de ayuda para la movilidad como muletas o un andador
Nivel 4	Pacientes que dependen de sillas de ruedas, movilidad motorizada, o asistencia física en la mayoría de los lugares. La auto-movilidad se limita a distancias cortas.
Nivel 5	Pacientes que son completamente dependientes de otros para el cuidado y la movilidad, incluso con el uso de la tecnología de asistencia.

Por base del tipo y distribución de los hallazgos motores predominantes se clasifican de la siguiente manera: [22]

### **Hemiparética**

Se encuentra generalmente en pacientes que presenta un derrame cerebrovascular, la mayoría de los casos se presenta antes del nacimiento. Los síntomas se presentan en las primeras 4 u 8 semanas de nacido.

Este tipo de parálisis presenta posturas irregulares y deformación en brazos, piernas y rostro. Estancamiento en el crecimiento de los miembros y proporcionalmente debilidad en estos, esta anomalía se presenta con mayor fuerza en brazos y manos. También se presenta un corte parcial en el campo visual del paciente.

### **Hemiparética doble**

Se presenta generalmente en pacientes que hayan tenido accidentes vasculares en el cerebro de alta complejidad, también se presenta por asfixia de nacimiento a término o de corto plazo. Sus síntomas son, debilitamiento de miembros superior e inferior, a diferencia de la parálisis Hemiaparética, esta se muestra con más fuerza en un lado del cuerpo que en el otro.

### **Parálisis cerebral dística**

Este tipo de parálisis es la más común que se presenta después del parto, este representa alrededor de un 80 % de los casos.

A diferencia de los demás, se presenta con la debilidad de miembros, con mayor fuerza en las piernas; también se puede identificar por la presencia de clonus de tobillo, movimiento brusco al realizar la caminata.

Presenta problemas en la motricidad fina en manos y brazos, dificultando así las actividades diarias. Como problemas asociados se presenta anomalías en el intelecto, visión y alimentación.

### **Extrapiramidal**

Se presenta por medio de movimientos involuntarios e incontrolables, se puede ver como distonias en hombros, tronco y manos. Estos síntomas se evidencian al final del primer año de vida, ya que en este momento se observa movimientos a gran escala y extraños al realizar las actividades motoras como gatear o al recoger algún objeto. Como consecuencia a mayor edad los pacientes presentan estrés, fatiga, ansiedad, frustración o vergüenza, por lo tanto tienden a empeorar su condición

### **Hipotómica/Atómica**

Se presenta como disminución o ausencia de reflejos de estiramiento muscular, con una gran debilidad en las piernas y brazos flácidos.

El síndrome de Down es una de las causas mas popular para este tipo de parálisis, se debe tener en cuenta que hay otros síndromes como Angelman, Coffin-Lowry, Miller-Dieker, Prader-Willi o Zellweger que puede producir la parálisis hipotómica

#### **2.1.2. Tratamiento**

En la realización de las terapias se tienen en cuenta los diversos factores que se presentan dependiendo de la enfermedad o discapacidad de los pacientes, los factores constan de la posibilidad de que el paciente pueda caminar, que presente una estabilidad completa o parcial en las extremidades a desarrollar la terapia; cuando los pacientes presentan dispositivos que complementen alguno de los factores mencionados anteriormente como bastones, andadores, entre otros, [23] la fisioterapeuta debe presentar atención en los movimientos realizados, tono muscular y las funciones cognitivas [24], así como asistencia educativa en busca de los mejores resultados. [25]

## **2.2. Marcha humana**

Para realizar un mecanismo para rehabilitación de tobillo, se deben tener un conocimiento previo sobre los movimientos que se producen en el tobillo ya que si no se contemplan los límites del movimiento se puede producir lesiones y perjudicar al paciente que esté realizando el tratamiento. Por lo tanto, es importante saber que el tobillo presenta dos movimientos importantes, flexión plana y dorsiflexión, el cual es la variación del ángulo entre las piernas y los pies, también está la inversión y la eversión la cual es cambio de posición de la superficie plana en su propio eje, como se puede ver en la figura2.1[26].



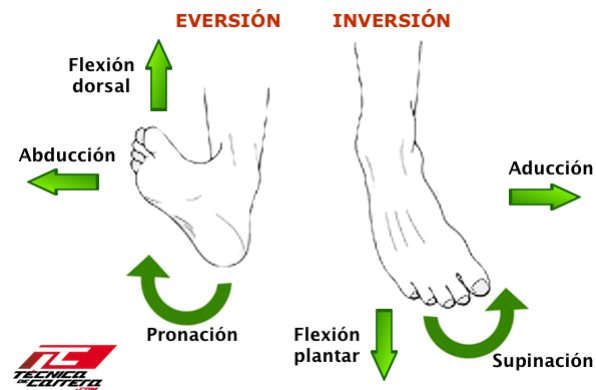


Figura 2.1: Anatomía[1]

### 2.2.1. Ciclo de marcha humana

La marcha humana está descrita por una serie de movimientos de las extremidades y el tronco, el cual produce un movimiento hacia adelante del centro de gravedad.[27]

El ciclo de la marcha comienza con un empuje desde el antepié, luego con un balanceo y por último con un golpe de talón. La marcha se puede definir en dos fases (la postura y el swing) como se puede ver en la imagen 1.11[28]

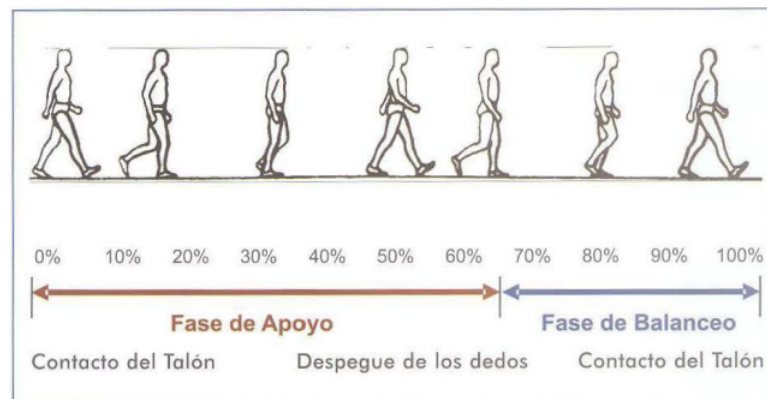


Figura 2.2: Caminata humana

También se puede ver en la figura 2.3 como en el ciclo de la marcha hay un tiempo en donde las dos extremidades se encuentran apoyadas sobre la superficie, este apoyo doble hace la diferencia entre las velocidades que se tiene en el transcurso de la marcha es decir la diferencia entre correr o caminar. El momento en donde los dos pies están en contacto con el suelo tiene un aproximado del 10% del ciclo total [29]

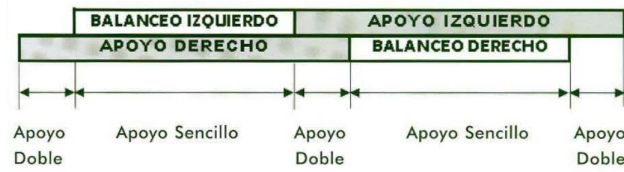


Figura 2.3: Secuencia de los pies entre las fases

**Fase de apoyo**

En la fase de apoyo esta presente en el 62 % del ciclo completo, es el periodo en donde el pie esta en contacto con el piso , este se lleva a cabo en 3 subfases que se pueden ver en la siguiente tabla 2.2

Tabla 2.2: Fase de apoyo

Imagen	Fase
	Fase de contacto es cuando se apoya el talón en el borde lateral, el pie sigue girando hasta que los metatarsianos soportan por completo el peso
	Fase de contacto medio es cuando el pie está totalmente apoyado sobre el piso en un estado rígido soportando la fuerza generada por la pierna mientras esta continua con su movimiento
	Fase propulsiva, esta fase es cuando inicia el ascenso del pie desde el talón hasta lograr el levantamiento de los dedos del pie

**Fase swing (Balanceo)**

Esta fase se presenta cuando el pie se encuentra en el aire, el cual cumple con el 38 % restante del ciclo, este permite que el pie se recupere y cambie de posición para repetir la fase de postura nuevamente.[27]

En esta etapa también se tienen en cuenta las articulaciones del tobillo, cadera y rodilla, para ello se debe analizar en el plano sagital, por lo tanto se tiene:

**Tobillo**

El tobillo realiza una flexión desde el punto del desprendimiento del piso hasta el punto medio de la fase, logrando así una posición neutral el cual continua hasta que el pie vuelva a estar en contacto con el piso.

**Rodilla**

Entre el despegue hasta la mitad del balanceo, la rodilla presenta una variación de ángulo entre los 40° hasta 65°, el cual es el ángulo de máxima flexión. En la fase media hasta que el

pie entre en contacto nuevamente con el piso, la rodilla se extiende completamente, logrando así una desaceleración en la pierna y ubica el pie en las posiciones deseadas.

### Cadera

La cadera presenta una posición neutral en el despegue; esta realiza un movimiento en donde se flexiona  $30^\circ$  aproximadamente al culminar la media fase del balanceo, permanece en esta posición hasta culminar toda la fase del balanceo, hasta que el talón entre en contacto con el piso.

### 2.2.2. Variables de ciclo de marcha

Las variables presente en el ciclo de marcha en el estudio de la locomoción humana, se presentan a continuación:

- Zancada: Hace referencia a la secuencia que comprende por dos pasos
  - Tiempo de zancada: Tiempo necesario para realizar un solo paso
  - Longitud de zancada: Distancia que abarca una zancada en dirección del movimiento
  - Cadencia: Es la frecuencia con la que se realiza el paso, se define como el número de pasos por minuto
  - Velocidad: Unidad que define la distancia cubierta por la locomoción por unidad de tiempo.
- [19]

### 2.2.3. Adquisición de datos

Para la adquisición de datos se han presentado diversas estrategias, una de ellas es por medio de señales electromiografías, para una buena adquisición es necesario tener un buen acondicionamiento de la señal, teniendo en cuenta la frecuencia de muestreo y resolución, los sensores aplicados en este tipo de sistema son electrodos ubicados en tres lugares específicos del miembro inferior logrando así una grabación multicanal [16]

Otro de los sistemas medidos, es el análisis del movimiento por medio de cámaras implementadas en la habitación capturando el movimiento de la persona. Un método diferente es la implementación de trajes especializados con sensores electromecánicos utilizando para ello estructuras rígidas, compuestas por barras mecánicas o plásticas unidas por potenciómetros, estos, constan de un elemento deslizante acoplado a una resistencia, que produce una variación de tensión, la cual, puede medirse para conocer el grado de apertura de la articulación que se encuentra acoplado. También se pueden utilizar transmisores por medio de campos electromagnéticos de baja frecuencia, estos dispositivos consta de 18 sensores, un transmisor y una unidad de control central, la cual recolecta todos los datos de los sensores [24].

## Capítulo 3

# Análisis cinemático y dinámico.

### Mecanismo de cuatro barras

El mecanismo de cuatro barras en lazo cerrado, tiene tres eslabones móviles, uno fijo y cuatro juntas en donde se tienen en cuenta revolutas ( pivote o pasador), y el eslabón conectado a la fuente de potencia, llamado eslabón de entrada.

Debido a que este mecanismo permite la obtención de trayectorias tipo gota la cual es la misma que se presenta en el ciclo de marcha, por lo cual se selecciona un mecanismo de cuatro barras como elemento principal para la rehabilitación del tobillo, con este fin es necesario tener en cuenta la cinemática y dinámica

### 3.1. Ecuaciones Cinemáticas

El diagrama esquemático del mecanismo de cuatro barras de la figura 3.1, se puede observar que  $a$  es el eslabón de referencia( eslabón fijo),  $b$  es el eslabón de entrada,  $c$  es el acoplador y  $d$  es el eslabón de salida,  $\theta_i$  corresponde al desplazamiento angular de cada uno de los eslabones, dichos eslabones depende de la edad del niño, ya que esta varia el tamaño de estos. El mecanismo tiene acoplado un actuador en el eslabón de entrada ( $b$ ), el punto  $P$  es el punto unido a el eslabón acoplador, debe realizar la secuencia de puntos, los cuales forman la trayectoria del mecanismo debe seguir. El análisis cinemático del mecanismo de cuatro barras se puede ver a continuación.

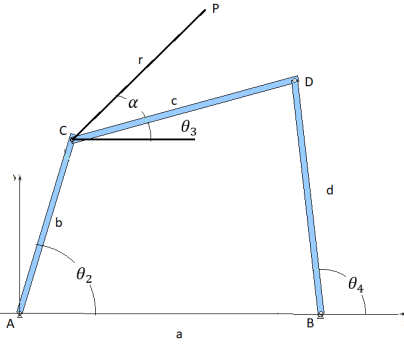


Figura 3.1: Mecanismo de cuatro barras

Con respecto a la figura 3.1 se determinan las posiciones del punto  $C$  como:

$$C_x = b \cos(\theta_2)$$

$$C_y = b \sin(\theta_2) \quad (3.1)$$

Utilizando el teorema de Pitágoras se puede obtener las coordenadas de  $(D_x, D_y)$ , lo cual están ligadas por el eslabón fijo donde:

$$c^2 = (D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 \quad (3.2)$$

$$d^2 = (D_x - a)^2 + (D_y)^2 \quad (3.3)$$

Despejando las expresiones (3.2) y (3.3) se obtiene

$$D_x = \frac{b^2 - c^2 + d^2 - a^2}{2(C_x - a)} - \frac{C_y D_y}{(C_x - a)} = S - \frac{C_y D_y}{(C_x - a)} \quad (3.4)$$

reemplazando la expresión (3.4) en la (3.3) se obtiene

$$D_y = \frac{-\left(\frac{2C_y(a-s)}{C_x-a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2C_y(a-s)}{C_x-a}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{C_y^2}{(C_x-a)^2}\right)\left((a-s)^2 - d^2\right)}}{2\left((a-s)^2 - d^2\right)} \quad (3.5)$$

Para calcular los ángulos se pueden hallar de la siguiente forma

$$\theta_3 = \text{atan}\left(\frac{D_y - C_y}{D_x - C_x}\right)$$

$$\theta_4 = \text{atan}\left(\frac{D_y}{D_x - a}\right)$$

Para las coordenadas del punto  $P$  se pueden determinar por medio de las siguientes expresiones

[30]

$$P_x = b\cos(\theta_2) + r\cos(\theta_3 + \alpha)$$

$$P_y = b\sin(\theta_2) + r\sin(\theta_3 + \alpha)$$

### 3.2. Ecuaciones Dinámicas

El análisis dinámico esta dado por el lagrangiano el cual se define como una función escalar de la que se obtiene las ecuaciones diferenciales del movimiento, teniendo en cuenta todas las fuerzas presentes en el mecanismo . Esto permite escribir las ecuaciones de forma generalizada de manera que formalmente sean iguales. Teniendo en cuenta eso el langrangiano se expresa como se ve en la ecuación (3.6),en donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial. [31]

$$L = T - U \quad (3.6)$$

La energía cinética esta expresada de la siguiente forma

$$T = \sum_{n=2}^4 \left[ \frac{1}{2} m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2) + \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i \right] \quad (3.7)$$

Donde (Ver apéndice A)

$$v_{ix} = \alpha_i \dot{\theta}_2 \quad (3.8)$$

$$v_{iy} = \beta_i \dot{\theta}_2 \quad (3.9)$$

$$\dot{\theta}_i = \gamma_i \dot{\theta}_2 \quad (3.10)$$

Remplazando las ecuaciones en ,se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^4 [m_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) + \gamma_i^2 J_i] \dot{\theta}_2 \quad (3.11)$$

donde

$$A_{(\theta_2)} = \sum_{n=2}^4 [m_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) + \gamma_i^2 J_i] \quad (3.12)$$

Por lo tanto

$$T = A_{(\theta_2)} \dot{\theta}_2 \quad (3.13)$$

La energía potencial se tiene que analizar por cada uno de los eslabones, por lo tanto esta se expresa de la siguiente forma

Eslabón 2

$$\mu_2 = m_2g [r_2\text{sen}(\theta_2 + \phi_2)] \quad (3.14)$$

Eslabón 3

$$\mu_3 = m_3g [l_2\text{sen}(\theta_2) + r_3\text{sen}(\theta_3 + \phi_3)] \quad (3.15)$$

Eslabón 4

$$\mu_4 = m_4g [l_1\text{sen}(\theta_1) + r_4\text{sen}(\theta_4)] \quad (3.16)$$

Teniendo en cuenta esto se tiene que la energía potencial esta dada por:

$$U_{(\theta_2)} = \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \quad (3.17)$$

Teniendo esto el lagrangiano se expresa como

$$L = A_{(\theta_2)}\dot{\theta}_2^2 - U_{(\theta_2)} \quad (3.18)$$

El método de modelo por Euler - Lagrange se expresa como una ecuación diferencial de segundo orden la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos de trabajo y la energía almacenada en el sistema teniendo en cuenta esto se tiene que[32]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau \quad (3.19)$$

reemplazando en tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( A_{(\theta_2)}\dot{\theta}_2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} = \tau \quad (3.20)$$

$$A_{(\theta_2)}\ddot{\theta}_2 + \frac{dA_{(\theta_2)}}{dt} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} = \tau \quad (3.21)$$

por medio de derivadas totales se puede reducir términos [33]

$$\frac{dA_{(\theta_2)}}{dt} \dot{\theta}_2 = \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 = \tau \quad (3.22)$$

por lo tanto

$$A_{(\theta_2)}\ddot{\theta}_2 + \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} = \tau \quad (3.23)$$

$$A_{(\theta_2)}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} = \tau \quad (3.24)$$

## Capítulo 4

# Diseño Controladores

Como fue mencionado anteriormente el mecanismo de cuatro barras es utilizado en terapias de rehabilitación, por lo tanto es necesario realizar un método de control asegure el buen funcionamiento del sistema, ya que si esto no se cumple puede ser contra producentes hacia el paciente, por esta razón se propone una estrategia de control las cuales pueden regular adecuadamente la posición del mecanismo.

### 4.1. Adquisición de trayectoria para rehabilitación de tobillo.

#### Ángulos del Miembro Inferior.

Para la implementación de controles se debe tener en cuenta los ángulos generados por las articulaciones de cadera y tobillo, ya que por medio de estas se adquiere la trayectoria la cual debe realizar el mecanismo.

Para obtener dichas ángulos, se utilizó el programa OpenSim (figura 4.1 ), Este es un Software libre que permite modelar y simular la dinámica musculo esquelético[34]. Para el análisis del movimiento desarrollada en la marcha se utilizó un archivo ya generado anteriormente por este el cual nos permite obtener los ángulos de rotación en el plano sagital de las articulaciones mencionadas anteriormente, en la figura 4.2 se puede observar dichas ángulos.[35]



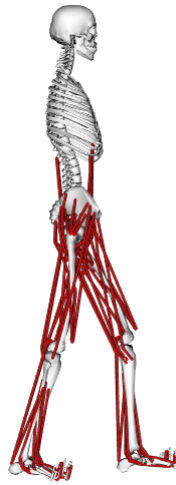


Figura 4.1: software de simulacion OpenSim

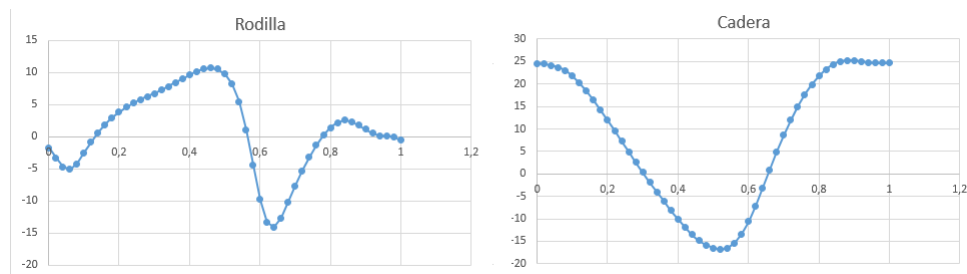


Figura 4.2: Ángulos de rotación en cadera y rodilla.

Al tener las señales, estas se procesan en el toolbox de Matlab *Curve Fitting*, generando de esta el polinomio (Ec. 4.1, 4.2) los cuales con ellos son posibles calcular los ángulos de la cadera( $q_1$ ) y de la rodilla( $q_2$ ) en un sitio específico del ciclo ,ya que estos están parametrizados para un porcentaje «x» del ciclo.

$$q_1 = -1,161 \times 10^{-10}x^7 + 3,494 \times 10^{-8}x^6 - 3,891 \times 10^{-6}x^5 + 0,0002027x^4 \\ - 0,005726x^3 + 0,1071x^2 - 0,3485x - 24,46 \quad (4.1)$$

$$q_2 = 6,222 \times 10^{-11}x^7 - 5,583 \times 10^{-9}x^6 - 1,368 \times 10^{-6}x^5 + 0,0002078x^4 \\ - 0,008687x^3 + 0,08641x^2 + 0,8506x + 4,855 \quad (4.2)$$

### Trayectoria Generada

La trayectoria que genera el tobillo en el plano sagital son generadas por las ecuaciones cinemáticas del miembro inferior el cual se asemeja a un péndulo doble(Figura:4.3)

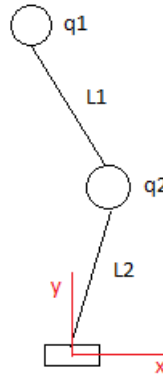


Figura 4.3: Diagrama del péndulo doble

De esta forma se determinaron las posiciones  $X$  (ec.4.3) y  $Y$  (ec.4.4) en el ciclo de marcha del tobillo en función de los ángulos de movimiento de la cadera (ec. 4.1) y la rodilla (4.2), también dichas posiciones varían dependiendo de la edad del niño ya que la longitud entre cadera-rodilla ( $L_1$ ) y rodilla-tobillo ( $L_2$ ) cambian.

Las medidas antropométricas de niños entre 2 a 12 años son[36]:

Tabla 4.1: Medidas antropométricas

Dimensiones antropométricas de pierna y muslo		
Edad [años]	Muslo ( $L_1$ ) [mm]	Pierna ( $L_2$ ) [mm]
2	129	184
3	218	207
4	240,5	229
5	260	247
6	288	263
7	310	277
8	325,5	295
9	345	312
10	362	331
11	386	347
12	397,5	360

$$X = L_2 \cos(q_1) \cos(q_2) - \sin(q_1) \sin(q_2) + L_1 \cos(q_1) \quad (4.3)$$

$$Y = L_2 \sin(q_1) \cos(q_2) + \cos(q_1) \sin(q_2) + L_1 \sin(q_1) \quad (4.4)$$

Teniendo como resultado la siguiente trayectoria (Figura 4.4)

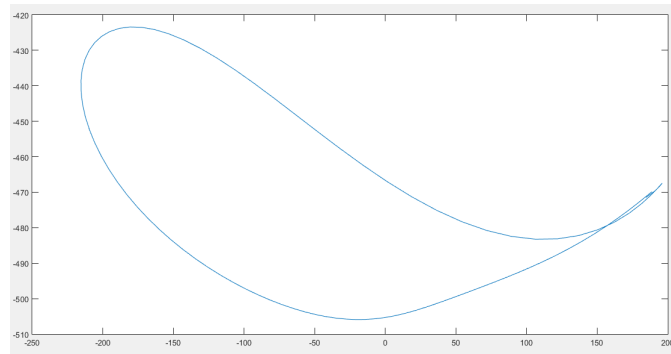


Figura 4.4: Trayectoria Generada

## 4.2. Controles implementados

### Sistemas de control

Los sistemas de control se basan en un arreglo de componentes conectados de tal manera que pueda comandar, dirigir o regular, así mismo a otro sistema. Esto se puede realizar por dos métodos, control por lazo abierto o por lazo cerrado.

#### Control de lazo abierto

En este caso se tiene que el sistema de control no presenta la salida ni se mide ni se realimenta para compararla con la entrada. La salida no tiene efecto sobre la señal o acción de control. En la figura 4.5 se muestra el diagrama de bloques del control en lazo abierto



Figura 4.5: Control lazo abierto

#### Control de lazo cerrado

En los sistemas de control de la cerrado, la salida o señal controlada se realimenta para ser comparada con la entrada o referencia, la cual genera una señal de acción que ingresa al controlador esto se puede ver en la figura 4.6 . Un sistema de control de lazo cerrado es aquel en el que la señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control. La diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida se denomina señal de error del sistema. [37]

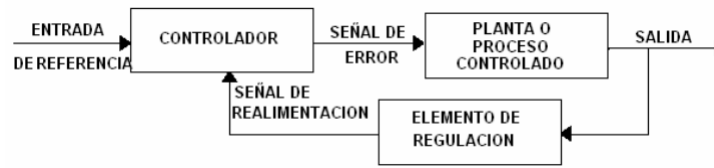


Figura 4.6: Control en lazo cerrado

### 4.2.1. Servo sistema

En la teoría moderna de control se enfatiza en el concepto de realimentación de estados, ya que los métodos clásicos no permite especificar todos los polos a lazo cerrado de un sistema de orden superior a dos.[38]

En las figuras 4.7 y 4.8 se puede ver el esquema de control de realimentación de estados (servo sistema).

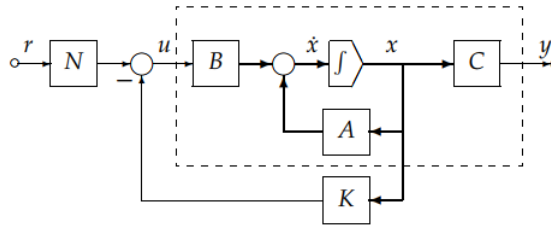


Figura 4.7: Realimentación de estados

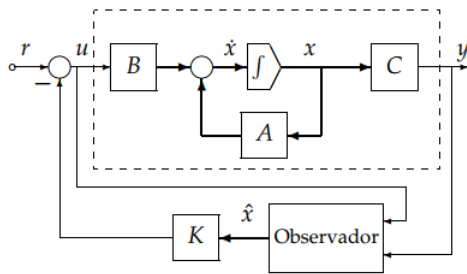


Figura 4.8: Realimentación con observador

Uno de los controles que se van a implementar es el servo sistema. El diseño de este se lleva a cabo con los espacios de estado del sistema reducido del modelo cinemático del mecanismo de cuatro barras, en un punto de equilibrio de  $\frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 53,4574 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0477 \end{bmatrix}$$

$$C = [ 1 \quad 0 ]$$

$$D = [0]$$

Para realizar los cálculos de control se determina el polinomio deseado (ec. 4.5.) de 3 orden ya que es necesario aplicar un factor integrante y de esta forma garantizar que el error en estado estable sea cero, por lo tanto se agrego un polo no dominante al polinomio deseado

$$(s^2 + 2\zeta wn s + wn^2) * (s + 5\zeta wn) \quad (4.5)$$

Teniendo en cuenta que se quiere obtener un respuesta subamortiguada por lo tanto se determinó un  $\zeta = 0,7$ , teniendo en cuenta que se quiere tener un máximo sobre impulso menor al 5% y un tiempo de establecimiento igual a 4 seg , con estos parámetros se determinó la frecuencia natural( $wn$ ), hallada por medio de la siguiente ecuación

$$wn = \frac{4}{ts * \zeta} = 1,4286$$

Reconstruyendo el polinomio deseado con los parámetros anteriores se tiene como resultado

$$s^3 + 7s + 12,04s + 10,2$$

Se define la matriz K como:

$$K = [ k1 \quad k2 \quad ki ]$$

La polinomio característica se presenta como:

$$SI - \tilde{A} + \tilde{B}K$$

Donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando se tiene :

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 53,5474 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,0477 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k1 & k2 & ki \end{bmatrix}$$

$$s^3 + (1,048k2)s^2 + (1,048ki - 53,46)s - 1,048ki$$

Igualando los polinomios se obtuvieron como resultado las siguientes constantes  $K1 = 52,9715$ ,  $K2 = 1,9089$ , y  $Ki = -9,73595$ .

El observador se realizo el mismo procedimiento teniendo en cuenta que el tiempo de establecimiento del observador es 10 veces mas rápido que el de control, de esta forma las constantes son  $L1 = 20$  y  $L2 = 257,5390$

#### 4.2.2. Servo sistema dinámico

El servo sistema dinámico se implementó para realizar un control con las ecuaciones dinámicas del sistema (apéndice A) y de esta forma obtener una respuesta mas cercana a la realidad, para ello fue necesario implementar un servo sistema con factor integrante para reducir el error en el estado estable, por lo tanto es necesario tener un polinomio de tercer orden como en el caso anterior, el polinomio deseado con un  $\zeta = 0,7$ ,  $ts = 4$  y  $wn = 1,4286$  es el siguiente:

$$s^3 + 7s + 12,04s + 10,2 \quad (4.6)$$

Se define la matriz K como:

$$K = [ k1 \quad k2 \quad ki ]$$

La polinomio característica se presenta como:

$$SI - \tilde{A} + \tilde{B}K$$

Donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para reducir de expresiones se definieron las siguientes funciones  $F = A(\theta_2)$ ,  $G = \frac{1}{2} \frac{\partial A(\theta_2)}{\partial \theta_2}$ ,  $R = -\frac{\partial U(\theta_2)}{\partial \theta_2}$  y  $H = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -\frac{G}{F} - \frac{R}{F} + \frac{\tau}{F} \right]$  por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{G}{F} & H \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{F} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remplazando se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{G}{F} & H & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{F} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_i \end{bmatrix} \\ s^3 + \left( \frac{G - k_1}{F} \right) s^2 - \left( H - \frac{k_2}{F} \right) s + \frac{k_i}{F} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Igualando las ecuaciones 4.6 y 4.7 se tiene que las constantes son

$$k_1 = -7F + G, \quad k_2 = (12,05 + H)G, \quad k_i = 10,2F$$

### 4.2.3. Modos deslizantes

Los modos deslizantes tiene la capacidad de ser una herramienta eficiente en el control complejo de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas.

Los modos deslizantes es un sistema dinámico gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias, el termino modos deslizantes surgió del contexto de los sistemas relevadores. Los modos deslizantes se generan por superficies de conmutación  $\sigma_i$ , la cual esta asociada a

$$\sigma(x) = [\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)]^T = 0$$

La superficie de conmutación son diseñadas tal que la respuesta este restringida a  $\sigma(x) = 0$  y presente un comportamiento estable. [39]

El calculo del control se determina por dos métodos, por control equivalente y control atractivo. El control equivalente restringe al sistema a la superficie deslizante (superficie de conmutación) y el control atractivo restringe al sistema a la vecindad de la superficie de conmutación (tracking).

Para modos deslizantes se tuvo en cuenta la siguiente ecuación la cual se dedujo del modelo dinámico del sistema visto en el capitulo 3.2

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{A_{\theta_2}} \left( \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \right) \quad (4.8)$$

Para este caso se determino una superficie de conmutación como

$$\sigma = \dot{\theta}_2 + k_1 \theta_2 + k_0 \int (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_1 \int \int (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_2 \int \int \int (\theta_2 - \theta_d) \quad (4.9)$$

para el tracking se deriva la superficie deslizante, por lo tanto se tiene

$$\dot{\sigma} = \ddot{\theta}_2 + k_1 \dot{\theta}_2 + k_0 (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_1 \int (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_2 \int \int (\theta_2 - \theta_d) \quad (4.10)$$

remplazando 4.8 en 4.10

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{A_{\theta_2}} \left( \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial U_{(\theta_2)}}{\partial \theta_2} \right) + k_1 \dot{\theta}_2 + k_0 (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_1 \int (\theta_2 - \theta_d) + k_0 k_2 \int \int (\theta_2 - \theta_d) \quad (4.11)$$

Para la realización de calculo del control se tiene en cuenta los siguientes parámetros

Para un U equivalente ( $u_{eq}$ ) el Tracking ( $\dot{\sigma}$ ) es igual a cero y  $u_{eq} = \tau$  y para  $u_n$  el Tracking( $\dot{\sigma}$ ) es igual a  $-L * sgn(\sigma)$

Teniendo en cuenta esto se tiene que

para  $u_{eq}$

$$u_{eq} = \frac{1}{2} \frac{\partial A(\theta_2)}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{\partial U(\theta_2)}{\partial \theta_2} - A_{\theta_2} \left( k1\dot{\theta}_2 + k0(\theta_2 - \theta_d) + k0_1 \int (\theta_2 - \theta_d) + k0_2 \int \int (\theta_2 - \theta_d) \right) \quad (4.12)$$

Para  $u_n$

$$\dot{\sigma} = u_{eq} + u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial A(\theta_2)}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial U(\theta_2)}{\partial \theta_2} + A_{\theta_2} \left( k1\dot{\theta}_2 + k0(\theta_2 - \theta_d) + k0_1 \int (\theta_2 - \theta_d) + k0_2 \int \int (\theta_2 - \theta_d) \right) \quad (4.13)$$

$$-L * sgn(\sigma) = u_{eq} + u_n - \frac{1}{2} \frac{\partial A(\theta_2)}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{\partial U(\theta_2)}{\partial \theta_2} + A_{\theta_2} \left( k1\dot{\theta}_2 + k0(\theta_2 - \theta_d) + k0_1 \int (\theta_2 - \theta_d) + k0_2 \int \int (\theta_2 - \theta_d) \right) \quad (4.14)$$

Remplazando 4.12 en 4.14,  $u_n$  queda expresado de la siguiente forma

$$u_n = -L * sgn(\sigma) \quad (4.15)$$

remplazando 4.13 en 4.15 :

$$u_n = -L * sgn \left( \dot{\theta}_2 + k1\theta_2 + k0 \int (\theta_2 - \theta_d) + k0_1 \int \int (\theta_2 - \theta_d) + k0_2 \int \int \int (\theta_2 - \theta_d) \right) \quad (4.16)$$

Para el calculo de constantes se tiene

Un polinomio característico como

$$s^4 + k1s^3 + k0s^2 + k0_1s + k0_2 \quad (4.17)$$

Un polinomio deseado como

$$(s^2 + 2\zeta wns + wn^2) * (s + 5\zeta wn)^2$$

Al tener un polinomio característico de orden 4 es necesario agregar dos polos no dominantes al polinomio deseado.

Teniendo en cuenta que se quiere obtener un respuesta subamortiguado por lo tanto se determino un  $\zeta = 0,7$  y un tiempo de establecimiento igual a 4seg , con estos parámetros se determino la frecuencia natural( $wn$ ), hallada por medio de la siguiente ecuación

$$wn = \frac{4}{ts * \zeta} = 1,4286$$

el polinomio deseado es el siguiente



$$s^4 + 14,67s^3 + 62,67s^2 + 65,19s + 19,75 \quad (4.18)$$

igualando y , se tiene como resultado que las constantes del control son  $k_1 = 14,67$ ,  $k_0 = 62,67$ ,  $k_{0_1} = 65,19$  y  $k_{0_2} = 19,75$

### 4.3. Simulaciones

En esta sección se presenta el funcionamiento de cada uno de los controles propuestos en el capítulo anterior. Después de esto se presenta la simulación del mecanismo en un entorno virtual con el control que mejores resultados presente

#### 4.3.1. Servo sistema

En el capítulo 4.2.1 se presenta un sistema reducido, al cual se realizó un control por medio de la estrategia de servo sistema, teniendo en cuenta que este se presenta con un observador de estados. Retomando las constantes halladas anteriormente  $K_1 = 52,9715$ ,  $K_2 = 1,9089$ , y para el observador son  $L_1 = 20$  y  $L_2 = 257,5390$ , se procede a realizar la simulación, obteniendo la siguiente respuesta(4.9). El diagrama de bloques se presenta en el apéndice B.

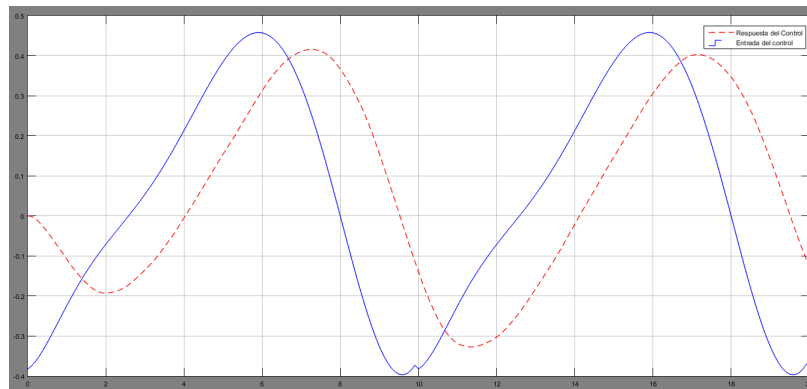


Figura 4.9: Servo sistema lineal

Como se puede apreciar en las gráficas la respuesta del sistema frente a la entrada del control, este intenta realizar el seguimiento de la trayectoria

#### 4.3.2. Servo Sistema Dinámico

Al ver que no se tuvo una buena respuesta frente al sistema linealizado se decide realizar un control dinámico el cual contempla la cinemática y la dinámica del mecanismo, como se puede ver en el capítulo anterior las constantes de este control dependen directamente del modelo las cuales son  $k_1 = -7 * F + G$ ,  $k_2 = (12,05 + H)G$ ,  $k_i = 10,2F$ , en este caso no se realizó un control con observador. El diagrama de bloques se presenta en el apéndice C.

En la imagen se puede observar la respuesta que se obtuvo al realizar la simulación, en este caso el resultado no fue lo esperado, como se puede ver el control no logra realizar la trayectoria deseada.

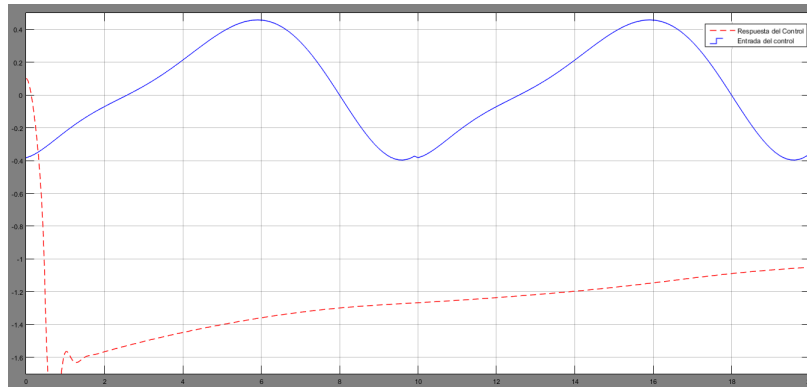


Figura 4.10: Servo sistema dinámico

### 4.3.3. Modos deslizantes

#### 4.3.3.1. Modos deslizantes-modelo matemático

Otro de los métodos de control que se propuso es el de modos deslizantes, en este se tiene implícito el modelo dinámico del mecanismo directamente en el control como se puede ver en el capítulo anterior. El control tiene como objetivo llevar al mecanismo a donde se desea de una forma suave.

En la imagen 4.11 se puede observar como el control logra realizar la trayectoria deseada, realizando los cambios de una forma suave y continua, de esta forma se garantiza que el paciente no experimente movimientos indeseados a la hora de la terapia, también se puede ver que este control responde a los cambios de ubicación, es decir que este corrige las perturbaciones

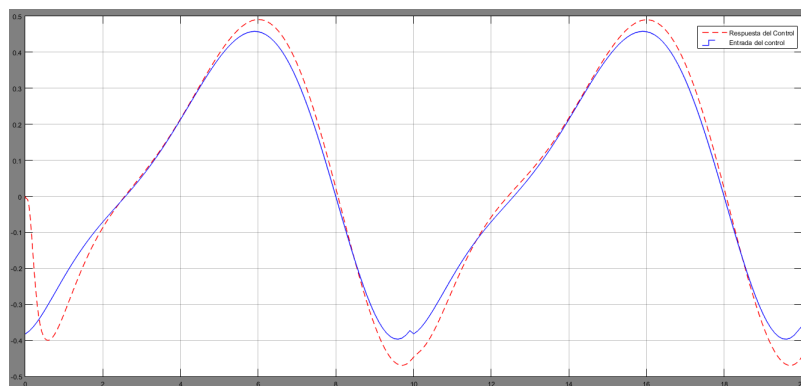


Figura 4.11: Modos deslizantes-modelo matemático

El diagrama de bloques se presenta en el apéndice D

#### 4.3.3.2. Modos deslizantes-modelo en SimMechanics

Al tener un control más robusto, se puede realizar la trayectoria impuesta por el usuario en una forma suave con el mínimo error. Se implementa el control en un ambiente semejante al real, para esto se realizó la simulación en SimMechanics, ya que este proporciona un entorno virtual de sistemas mecánicos en 3D, utilizando bloques que representan cuerpos, juntas, restricciones y sensores. También presenta una facilidad ya que en este programa se puede importar CAD completos, en este caso son importados desde SolidWorks[40]. En la imagen 4.12 se puede observar el diagrama de bloques del mecanismo de cuatro barras.

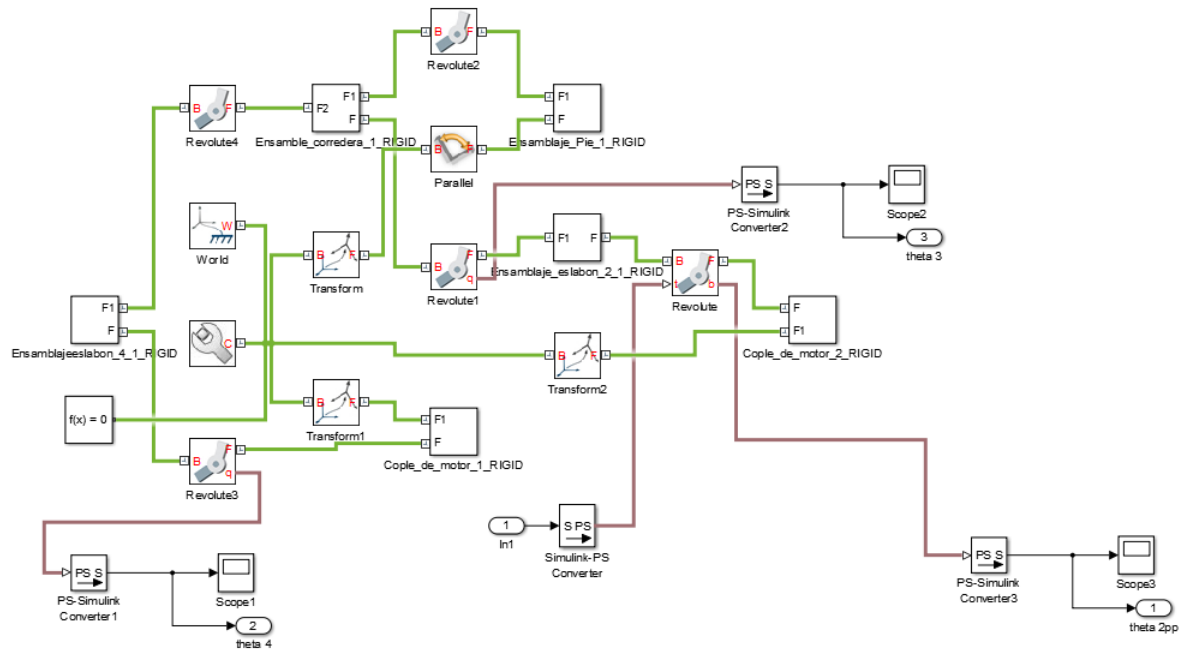


Figura 4.12: Modelo en SimMechanics

Después de tener el mecanismo en SimMechanics se realizó el montaje del control de modos deslizantes el cual se puede ver en el anexo 5, en la imagen 4.13 se puede observar el mecanismo implementado en SimMechanics. El diagrama de bloques se presenta en el apéndice E

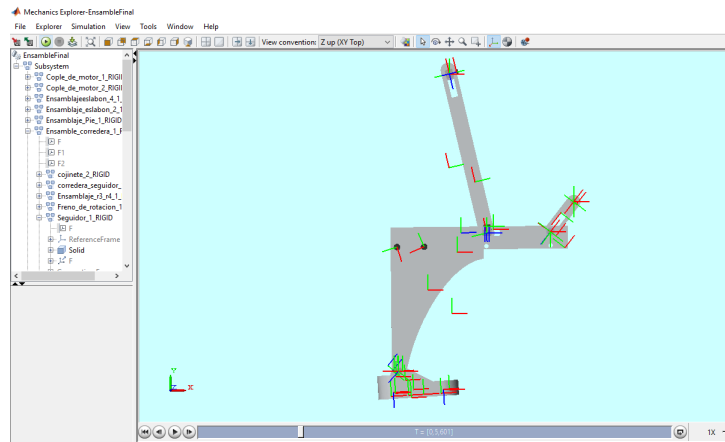


Figura 4.13: SimMechanics

En esta simulación se logró apreciar el éxito del movimiento realizado por la estructura al ingresarle el control por modos deslizantes, cumpliendo con el fin del seguimiento de la trayectoria deseada.

## Capítulo 5

# Resultados

En esta trabajo de grado se presenta diferentes estrategias de control con el fin de definir cuál de ellos cumple con mayor satisfacción los requisitos propuestos, para la llevar a cabo una rehabilitación de pacientes que presentes parálisis cerebral, especificando que esto se realizara a niños entre las edades de 3 a 7 años.

Para lograr establecer el control fue necesario realizar un análisis matemático del mecanismo de cuatro barras, estableciendo su modelo cinemático y dinámico, el cual la parte cinemática se realizo por métodos gráficos y la dinámica por Euler - Lagrange. Se realizó un análisis de las trayectorias presentes en el ciclo de marcha de un niño, como resultado se obtuvo que estas dependía directamente de los ángulos de la cadera y la rodilla, esto también depende de las medidas antropomórficas de los pacientes ya que estos varían según la edad del paciente.

Se logró validar varios tipos de control de forma lineal y no lineal, teniendo como resultado que por medio de modos deslizantes se obtuvo una respuesta adecuada a la trayectoria implementada.

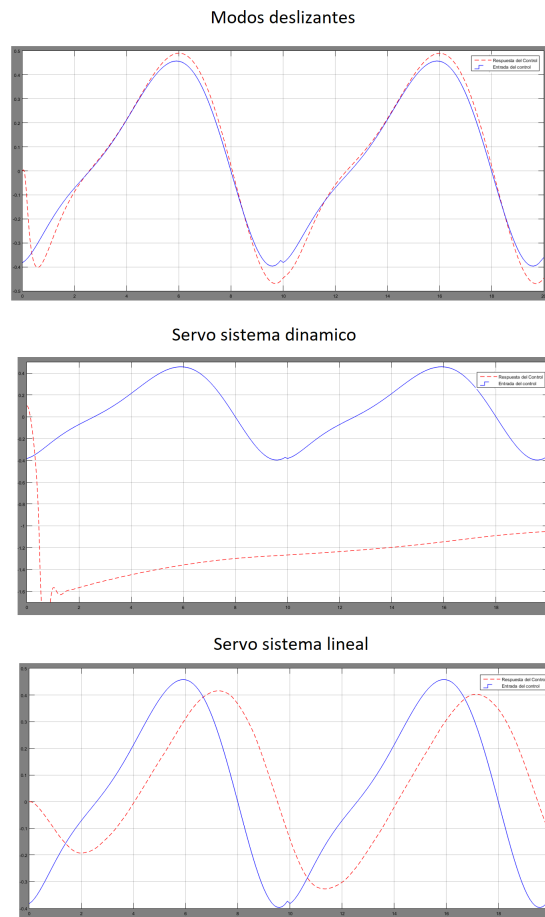


Figura 5.1: Respuesta de los sistemas de control

En la figura 5.1 se puede ver las respuesta de cada de los sistemas de control teniendo que las líneas punteadas es la respuestas del sistema y la línea continua es la referencia que dese debe seguir

## Capítulo 6

### Conclusiones

- En este trabajo se analiza, el movimiento de miembro inferior para determinar la trayectoria de la articulación del tobillo implementado en el mecanismo planar . En el capítulo 4.1, se muestra el análisis del miembro inferior el cual se asemeja al péndulo doble, donde las coordenadas presentes en el movimiento tobillo dependen directamente de los ángulos realizados por las articulaciones de la cadera y rodillas en el plano sagital, al determinar esto, se obtuvo dichos ángulos por medio del software OpenSim, logrando así un modelo matemático para las trayectorias realizadas en la terapias físicas presentes en la rehabilitación de niños con parálisis cerebral.
- Se diseñó y se simuló técnicas de control, las cuales son capaces de seguir la trayectoria obtenida en el capítulo 4.1 minimizando perturbaciones, para este caso se realizó dos estrategias, la primera por medio de servo sistemas y la segunda por modos deslizantes. Los cuales se presentan en el capítulo 4.2. Con estas simulaciones se logró determinar que el control por modos deslizantes presenta una mejor respuesta frente al seguimiento de trayectorias en el mecanismo de cuatro barras y la eliminación de perturbaciones externas.
- En solidworks se diseñó un CAD de mecanismo planar para la rehabilitación, este se vincula a un entorno virtual de simMechanics, al cual se le implementó la estrategia de control adecuada determinada en el capítulo 4.3 para el seguimiento de trayectorias, con el fin de verificar el buen funcionamiento de este.
- Se realizó un control para el mecanismo de rehabilitación de tobillo de un niño entre la edad de los 3 a 7 años que presenta parálisis cerebral, en donde se observó que el control mediante modos deslizantes cumple a cabalidad la trayectoria. Respectó a las perturbaciones presentes en el sistema el control las elimina por completo.

## Trabajos futuros

Los controles diseñados en este trabajo de grado, cumplieron con el seguimiento de trayectoria para terapias de rehabilitación de tobillo en niños de 3 a 7 años que presenta parálisis cerebral. Quedando como trabajos futuros la construcción de prototipo del mecanismo de cuatro barras. El estudio de otras técnicas de control para perfiles de velocidad y fuerza presentado en la marcha de diferentes pacientes. La implementación de etapa de potencia y control del sistema en el prototipo del mecanismo Desarrollo de la etapa para la adquisición de datos del paciente, logrando así un lazo cerrado en el sistema, completando las etapas mecánicas, eléctricas y de control.



# Bibliografía

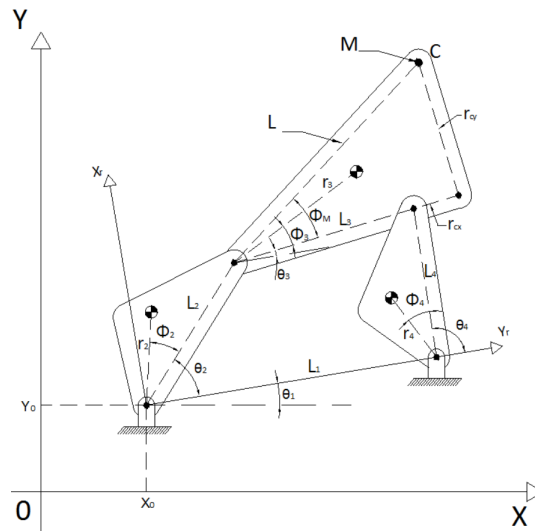
- [1] “<https://tobilloypie.wordpress.com/2015/12/05/metatarso-anatomia-y-fisiologia/> agosto 2012.”
- [2] J. S. Shilt, L. S. Haruno, and L. A. Karol, *Neuromuscular Disorders*. McGraw-Hill Education, 2017.
- [3] P. R. Carney and J. D. Geyer, *Pediatricpractice Neurology*. The McGraw-Hill Companies, 2010.
- [4] “<https://revistas.unal.edu.co/index.php/revfacmed/article/view/39694/47271>, 12 julio 2017.”
- [5] P. L. D. M. G. P. M. T. R. R. P. B. R. del Rio; Psic Fredy Santiesteban Macario; Lic Ma. Elena Garcia Valdes; Psic Martha Morales Eniquez; Psic Laura Garcia Leanos, “Carga percibida del cuidador primario del paciente con parálisis cerebral infantil severa del centro de rehabilitación infantil teleton,” *Medicina Física y Rehabilitación*, 2008.
- [6] F. M. S. R. F. F. M. G. M. P. E. C. P. Cappa, “Estimation of multivariable dynamic ankle impedance after botulinum toxin injection in children with cerebral palsy,” *2016 IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications*, 2016.
- [7] I. M. J. T. S. R. M. P. F. P. P. Cappa, “Evaluation of the effects on stride-to-stride variability and gait asymmetry in children with cerebral palsy wearing the wake-up ankle module,” *2016 IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications (MeMeA)*, 2016.
- [8] M. S. S. K. B. B. F. Kirchner, “Active ankle - an almost-spherical parallel mechanism,” *47th International Symposium on Robotics*, 2016.
- [9] S. Rahmatian, M. J. Mahjoob, and M. R. Hanachi, “Continuous estimation of ankle joint angular position based on the myoelectric signals,” in *2016 Artificial Intelligence and Robotics (IRANOPEN)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), apr 2016.
- [10] F.-Z. Low, M. D. Ali, J. Kapur, J. H. Lim, and C.-H. Yeow, “A soft robotic sock device for ankle rehabilitation and prevention of deep vein thrombosis,” in *2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), jun 2016.

- [11] E. M. Ficanha, G. A. Ribeiro, and M. Rastgaar, “Design and evaluation of a 2 dof instrumented platform for estimation of the ankle mechanical impedance in the sagittal and frontal planes,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 21, pp. 2531–2542, oct 2016.
- [12] M. Moltedo, T. Bacek, K. Junius, B. Vanderborght, and D. Lefeber, “Mechanical design of a lightweight compliant and adaptable active ankle foot orthosis,” in *2016 6th IEEE International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics (BioRob)*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), jun 2016.
- [13] Y. Z. N. W. F. G. K. W. Q. W. Z. Zhoua, “A proprioceptive neuromuscular facilitation integrated robotic ankle foot system for post stroke rehabilitation,” *Robotics and Autonomous Systems*, 2015.
- [14] G. C. P. Q. Z. G. H. Yu, “Mechanical design and evaluation of a compact portable knee ankle foot robot for gait rehabilitation,” *Robotics and Autonomous Systems*, 2015.
- [15] F. Cao, C. Li, and Y. Li, “Robust sliding mode adaptive control for lower extremity exoskeleton,” in *Proc. Chinese Automation Congress (CAC)*, pp. 400–405, Nov. 2015.
- [16] M. M. Moghadam, H. Shahi, and A. Yousefi-Koma, “An improvement on impedance control performance of an exoskeleton suit in the presence of uncertainty,” in *Proc. 3rd RSI Int. Conf. Robotics and Mechatronics (ICROM)*, pp. 412–417, Oct. 2015.
- [17] P. K. Jamwal, S. Hussain, M. H. Ghayesh, and S. V. Rogozina, “Impedance control of an intrinsically compliant parallel ankle rehabilitation robot,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, pp. 3638–3647, jun 2016.
- [18] J. Chen, X. Zhang, and L. Zhu, “Kinematics analysis and three-dimensional simulation of the rehabilitation lower extremity exoskeleton robot,”
- [19] F. C. Romero, “Desarrollo de la etapa tobillo pie de un sistema de rehabilitacion de marcha para ninos con paralisis cerebral,” Master’s thesis, Instituto Politécnico Nacional, 2017.
- [20] B. J. T. a. F. H. F. a. B. M. a. D. V. a. M. N. a. J. P. a. K. Draenert, *Orthopedic Surgery*. McGraw-Hill Education, 2014.
- [21] D. R. C. C. P. R. C. J. D. Geyer, *Pediatric Practice: Neurology; cap 11. Cerebral Palsy*. Access Pediatrics, 2010.
- [22] R. S. Rust and D. K. Urion, *Chapter 554. Cerebral Palsy and Static Encephalopathies*. The McGraw-Hill Companies, 2011.
- [23] M. a. S. M. M. a. P. J. M. M. Mary Ann E. Keenan, *Chapter 12. Rehabilitation*. The McGraw-Hill Companies, 2014.
- [24] F. D. N. A. M. E. M. . L. B. S. F. V. A. M. K. y A Nascimbeni, “Myoelectric activity of antagonist ankle-muscles in 6-to-8-year-old children during walking,” *Intelligent Solutions in Embedded Systems (WISES)*,, 2015.

- [25] J. William W. Hay, M. J. Levin, R. R. Deterding, and M. J. Abzug, *Cerebral Palsy*. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2017.
- [26] D. A. M. a. K. B. F. a. K. H. Albertine, *Chapter 37. Leg*. The McGraw-Hill Companies, 2011.
- [27] P. Acosta, "Biomecanica de la marcha,"
- [28] J. Brach, C. Rosano, and S. Studenski, *Mobility*. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2017.
- [29] C. A. Bohoquez, "Estudio sobre la marcha humana," *Ingenio*.
- [30] I. M. T. Piovan, *CAPITULO 2 MECANISMOS*. 2014.
- [31] "<http://ocw.uv.es/ciencias/2/1-2/112733mats50.pdf>, agosto 2017."
- [32] "<http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/mod/book/view.php?id=24924> agosto 2017."
- [33] M. A. R. Erazo, "Derivadas parciales, derivada parcial total y derivada parcial de funciones compuestas," 2014.
- [34] "<http://opensim.stanford.edu/work/index.html>; agosto 2017."
- [35] C. Silva, "Modelamiento de la marcha humana con protesis de miembro inferior mediante herramienta de simulacion dinámica (una aplicacion en opensim")," 2015.
- [36] E. G. Rosario Avila Chauvand, Lilia Prado, *Dimenciones antropometricas de la poblacion Latinoamericana*.
- [37] i. A. P. ing. Mario Alberto and B. E. perez, *Introduccion a los sisitemas de control y modelos matematicos para sistemas lineales invariantes en el tiempo*. 2008.
- [38] "<http://dea.unsj.edu.ar/control2/clase08a-controlporrealimentaciondeestados.pdf> agosto 2017."
- [39] L. Fridman, *Introduccion al control con modos deslizantes*. 2017.
- [40] "<https://www.mathworks.com/products/simmechanics.html>, agosto 2017."

## Apéndice A

### Análisis Dinámico



Para el análisis dinámico se analiza las velocidades angulares y velocidades de centro de masa.

Las velocidades angulares se expresan como:

$$\dot{\theta}_3 = \gamma_3 \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\theta}_4 = \gamma_4 \dot{\theta}_2$$

Donde

$$\gamma_3 = \frac{r_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{r_3 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

$$\gamma_4 = \frac{r_2 \text{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)}$$

La velocidad de los centros de masa se expresan de la siguiente manera, teniendo en cuenta que estas se determina para cada uno de los eslabones:

Eslabón 2:

$$v_{2x} = -l_2 \text{sen}(\theta_2 + \phi_2) \dot{\theta}_2$$

$$v_{2y} = l_2 \text{cos}(\theta_2 + \phi_2) \dot{\theta}_2$$

Eslabón 3:

$$v_{3x} = [-r_2 \text{sen}(\theta_2) - l_3 \gamma_3 \text{sen}(\theta_3 + \phi_3)] \dot{\theta}_2$$

$$v_{3y} = [r_2 \text{cos}(\theta_2) + l_3 \gamma_3 \text{cos}(\theta_3 + \phi_3)] \dot{\theta}_2$$

Eslabón 4:

$$v_{4x} = -l_4 \gamma_4 \text{sen}(\theta_4 + \phi_4) \dot{\theta}_2$$

$$v_{4y} = l_4 \gamma_4 \text{cos}(\theta_4 + \phi_4) \dot{\theta}_2$$

En resumen se tiene :

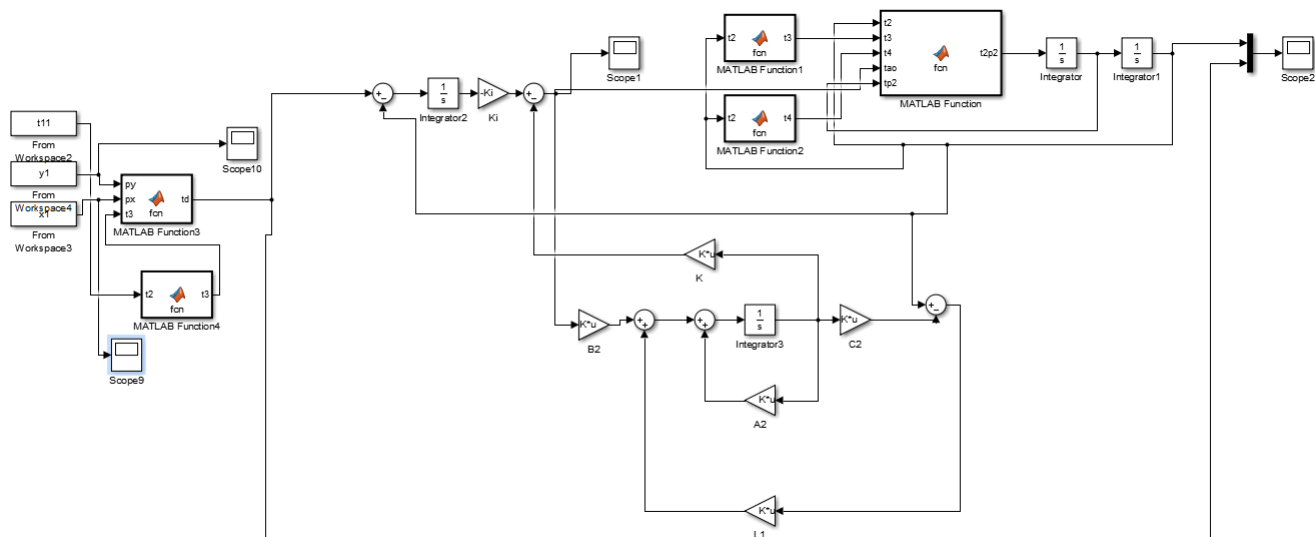
$$v_{ix} = \alpha_i \dot{\theta}_2$$

$$v_{iy} = \beta_i \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\theta}_i = \gamma_i \dot{\theta}_2$$

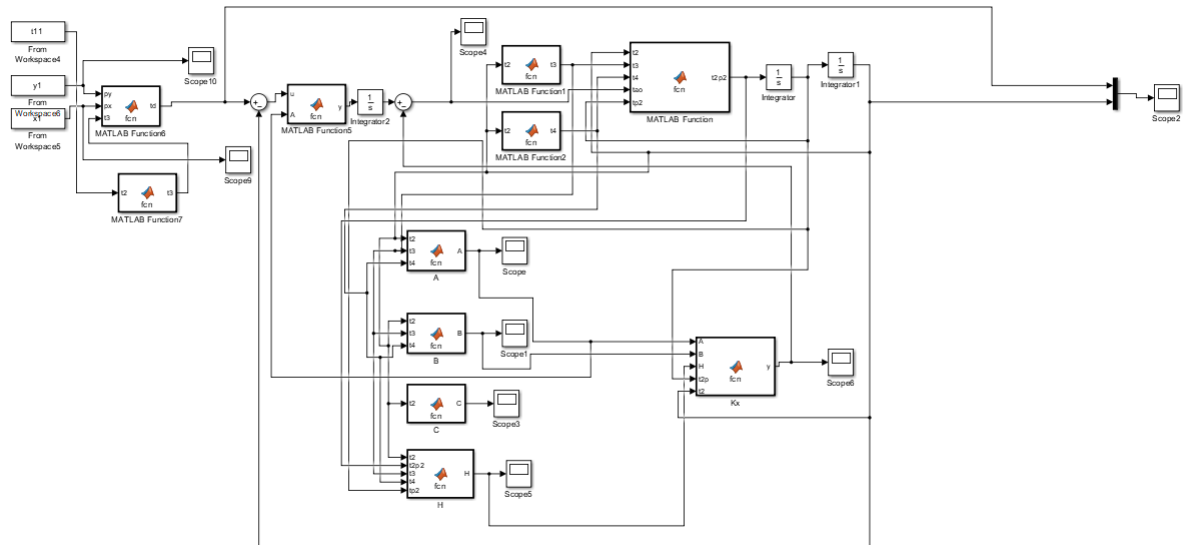
## Apéndice B

### Diagrama de control del servo sistema



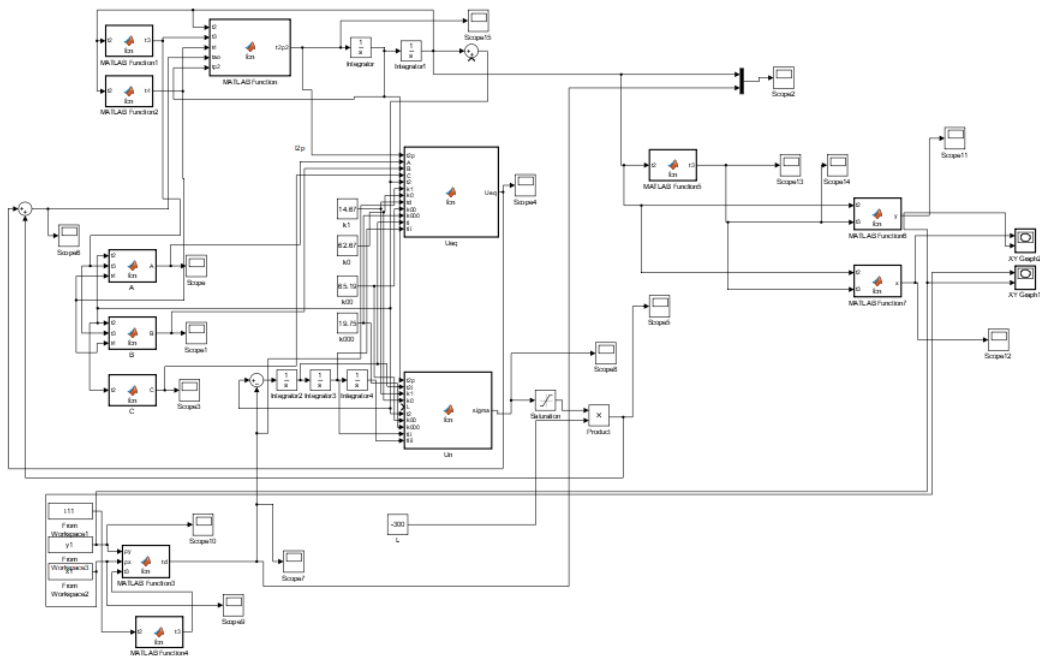
## Apéndice C

# Diagrama de control del servo sistema dinámico



## Apéndice D

# Diagrama de control modos deslizantes





## Apêndice E

# Diagrama de control modos deslizantes SimMechanics

